KONGRUENSI PADA SEMIALJABAR ATAS HEMIRING

SaniMusyafa Hikam[1], Bambang Irawanto[2], Solichin Zaki[3]
[1,2,3]ProgramStudiMatematika FSM UniversitasDiponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

A hemiring$R$ is called S-semialgebra if R is a left and right semi module over S satisfying $(ax)b = a(xb)$ for all $a, b \in S$and $x \in R$. On the S-semialgebra R can be defined a congruence. A congruence on the S-semialgebra R is any congruence on the hemiring R which is both a left and right compatible for any multiplication by element of S. Therefore, the properties of congruence on a hemiring can be generalized to congruence on a semi algebra over a hemiring.

Key words :hemiring, S-semialgebra R, congruence.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidakkosongdengansatuataulebihoperasibinerdanaksioma-aksioma yang berlaku.

SebuahhimpunanR disebut ring jika himpunan R merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, operasi pergandaannyabersifatasosiatif, sertakeduaoperasipenjumlahandanpergandaannyabersifatdistributifkanandandistributifkiri. Dari sifat-sifatinidapatdiperlemahdanmenjadistruktur aljabaryaitusemiring yang merupakansemigrupterhadapkeduaoperasi binernyaselanjutnyamemenuhidistributifkanandandistributifkiri.Jikasuatusemiringberelemennetraldanbersifatkomutatifmakaakanmembentukhemiring. Hemiringmerupakan ring yang diperlemahsebagaisemigrupterhadapoperasipenjumlahan, dengan kata lain hemiringmerupakan ring dimanasetiapelemen-elemennyatidakmempunyaielemen invers penjumlahan.

Selanjutnyadaridefinisihemiringdapatdiperkenalkanstrukturaljabar yang disebutsebagaisemialjabaratashemiring.Hemiring$R$ dikatakan semialjabaratas$S$,di mana$S$ adalahhemiring,jika$R$ adalahsemimodulkiri dan kananatas$S$yang memenuhi$(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

2. SEMIALJABAR ATASHEMIRING

Definisi2.1 [7]*Hemiring*$(H, +, \cdot)$ *adalah himpunan tak kosong H dengan operasi "+" dan "·" yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :*

i. $(H, +)$*merupakan monoid komutatif dengan elemen identitas* 0.
ii. $(H, \cdot)$*merupakan semigrup.*
iii. *Untuksetiap*$x, y, z \in H$, $x(y + z) = xy + xz$*dan* $(y + z)x = yx + zx$.
iv. *Untuksetiap*$x \in H$, $x0 = 0x = 0$.

Definisi2.2[1]*Hemiring*$(H, +, \cdot)$ *disebut:*

a. *Hemiringkomutatifjika*$(H, \cdot)$ *komutatif*
b. *Hemiringdenganelemensatuanjika* $(H, \cdot)$ *punya elemen satuan*
c. *Hemiringkanselatifpenjumlahanjika* $x, y, z \in H, x + z = y + z \Longrightarrow x = y$.

Definisi2.3 [7]*MisalkanH sebuah hemiring.DiberikanM monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan dengan elemen identitas* 0. *Himpunan M disebut semimodul kanan atas H jika untuk setiap* $a \in H$*dan* $x \in M$, *maka* $xa \in M$ *dan memenuhi aksioma-aksioma berikut*

i. $(x + y)a = xa + ya$
ii. $x(a + b) = xa + xb$
iii. $x(ab) = (xa)b$
iv. $x0 = 0a = 0$

untuksetiap$a, b \in H$ dan $x, y \in M$.
Dari definisi di atasdapatdidefinisikanM semimodul kiri atas H yaitu untuk setiap $a \in H$dan $x \in M$, maka $ax \in M$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut

i. $a(x+y) = ax + ay$
ii. $(a+b)x = ax + bx$
iii. $(ab)x = a(bx)$
iv. $0x = a0 = 0$

untuksetiap$a, b \in H$ dan $x, y \in M$.

Semialjabaratashemiringmerupakanstrukturaljabar yang terbentukdariduahemiringdimanasalahsatu hemiringnyamerupakansemimodulkanandansemimodulkiriatashemiring yang lain. Berikutiniakandiberikandefinisisemialjabaratashemiring.

Definisi2.4 [7]*MisalkanR sembarang hemiring (tidak harus komutatif dan mempunyai elemen satuan).Misalkan S juga hemiring.Rdisebut semialjabar atas S jika R adalah semimodul kiridansemimodulkanan (bi-semimodul) atasS sedemikian hingga $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$. Jika S hemiring komutatif dan R semialjabar atas S, maka dapat didefinisikan pergandaan elemen R oleh elemen-elemen S yaitu $xa = ax$ untuk $a \in S, x \in R$.*

Contoh :Diberikanhemiring$\mathbb{Z}_4$ yaitu hemiring bilangan bulat modulo 4, dan $\mathbb{Z}^+$hemiringbilanganbulattaknegatif.Hemiring$\mathbb{Z}_4$merupakansemialjabaratas$\mathbb{Z}^+$.

3. KONGRUENSI PADASEMIALJABAR ATAS HEMIRING

Definisi 3.5 [7]*Kongruensiρ pada semialjabar R atas S adalah kongruensi pada hemiring R, sedemikian hingga $(r, s) \in \rho$, $a \in S$ berarti bahwa $(ar, as) \in \rho$ dan $(ra, sa) \in \rho$.*
Contoh :Diberikanhemiring$R = \mathbb{Z}_4$ yaitu hemiring bilangan bulat modulo 4, dan $S = \mathbb{Z}^+$hemiringbilanganbulattaknegatif. Diketahui$R$ semialjabar atas S. Relasi$\rho = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3})\}$ pada semialjabar R atas Smerupakanrelasikongruensipadasemialjabar$R$ atas S.

Definisi 3.6 [7]*Kongruensiρ pada hemiring R dikatakan kansellatif jika untuk setiap $x, y, z \in R, (x+z, y+z) \in \rho$berarti $(x, y) \in \rho$.*

Lemma 3.7 [7]*Misalkanρ kongruensi pada hemiring R, maka $\bar{\rho}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in \bar{\rho}$ jika hanya jika terdapat $z \in R$ sedemikian hingga $(x+z, y+z) \in \rho$, adalah kongruensi kansellatif pada R yang memuat ρ.*

Bukti :*Untukmembuktikan lemma di atasakanditunjukkan$\rho \subseteq \bar{\rho}$.*
Diketahui$(x, y) \in \bar{\rho} \Leftrightarrow (\exists z \in R), (x+z, y+z) \in \rho$.
i). Akan ditunjukkanbahwa$(x, y) \in \rho \Longrightarrow (x, y) \in \bar{\rho}$
Diambil$z = 0 \in R$ sehingga
$(x+z, y+z) \in \rho$
$(x+0, y+0) \in \rho$*maka*$(x, y) \in \bar{\rho}$
ii). Akan ditunjukkan bahwa $(x+z, y+z) \in \rho \Longrightarrow (x, y) \in \bar{\rho}$
Diambilsembarang$u \in R$ sehingga
$((x+z)+u, (y+z)+u) \in \rho$
$(x+(z+u), y+(z+u)) \in \rho$; *dengan*$z+u \in R$
maka$(x, y) \in \bar{\rho}$
Dari i) – ii) terbuktibahwa$\bar{\rho}$ adalah kongruensi kansellatif pada R yang memuat ρ. ■

Definisi 3.8 [7]*Kongruensiρ pada semialjabar R atas S disebut reguler kiri jika ρ kansellatif pada hemiring R dan terdapat pasangan $(e_1, e_2) \neq (0,0)$ dengan $e_1, e_2 \in R$ sedemikian hingga*
$(x + e_1x, e_2x) \in \rho$*untuk setiap* $x \in R$
$(ae_1 + e_2a, e_1a + ae_2) \in \rho$*untuk setiap* $a \in S$.

Dapatdidefinisikankongruensiregulerkananpadasemialjabar$R$ atas S yaitu jika ρ kansellatif pada hemiring R dan terdapat *pasangan* $(e_1, e_2) \neq (0,0)$ *dengan* $e_1, e_2 \in R$ *sedemikian hingga* $(x + xe_1, xe_2) \in \rho$*untuk setiap* $x \in R$ $(e_1 a + ae_2, ae_1 + e_2 a) \in \rho$*untuk setiap* $a \in S$.

Jikaρ kongruensi reguler kanan dan kiripadasemialjabarRatas S, maka ρ disebut kongruensi reguler.

Lemma 3.9 **[7]***Jikaρ kongruensi reguler pada semialjabar R atas S, maka terdapat* $e, f \in R$ *sedemikian hingga* $(x + ex, fx) \in \rho$, $(x + xe, xf) \in \rho$ *untuk setiap* $x \in R$ *dan* $(ae + fa, ea + af) \in \rho$ *untuk setiap* $a \in S$.

Bukti :*Diketahuiρ kongruensi reguler pada semialjabar R atas S sehingga ρ merupakan kongruensiregulerkiridankanan. Karenaρ kongruensi reguler kiri pada R, terdapat* $e_1', e_2' \in R$ *sedemikian hingga*$(x + e_1'x, e_2'x) \in \rho$ *untuk setiap* $x \in R$, *dan*$(ae_1' + e_2'a, e_1'a + ae_2') \in \rho$ *untuk setiap* $a \in S$. *Begitujugakarenaρkongruensi regular kananpadaR, terdapat* $e_1'', e_2'' \in R$ *sedemikian hingga* $(x + xe_1'', xe_2'') \in \rho$ *untuk setiap* $x \in R$, *dan*$(e_1''a + ae_2'', ae_1'' + e_2''a) \in \rho$ *untuk setiap* $a \in S$. *Maka*$(e_1'' + e_1'e_1'', e_2'e_1'') \in \rho$,$(e_2'' + e_1'e_2'', e_2'e_2'') \in \rho$, *dan*$(e_1' + e_1'e_1'', e_1'e_2'') \in \rho$, $(e_2' + e_2'e_1'', e_2'e_2'') \in \rho$.*Dari hasilkombinasidiperoleh*$(e_1'' + e_1'e_1'' + e_1'e_2'', e_1' + e_1'e_1'' + e_2'e_1'') \in \rho$, *dan*$(e_2'' + e_1'e_2'' + e_2'e_2'', e_2' + e_2'e_1'' + e_2'e_2'') \in \rho$. *Karenaρ adalah kansellatif berarti bahwa*$(e_1'' + e_1'e_2'', e_1' + e_2'e_1'') \in \rho$, *dan*$(e_2'' + e_1'e_2'', e_2' + e_2'e_1'') \in \rho$. *Kombinasidarikeduanyadidapatkan*$(e_1' + e_2'' + e_1'e_2'' + e_2'e_1'', e_2' + e_1'' + e_1'e_2'' + e_2'e_1'') \in \rho$. *Karenaρ adalah kansellatif berarti bahwa*$(e_1' + e_2'', e_2' + e_1'') \in \rho$. *Olehkarenaitu*$(e_1'x + e_2''x, e_2'x + e_1''x) \in \rho$, *untuk setiap* $x \in R$.
Dari definisikongruensiregulerkiridiketahuibahwa$(x + e_1'x, e_2'x) \in \rho$, *untuk setiap*$x \in R$. *Olehkarenaitujikakeduanyadikombinasikandidapatkan*$(x + e_1'x + e_2'x + e_1''x, e_1'x + e_2'x + e_2''x) \in \rho$, *untuk setiap* $x \in R$. *Karenaρ adalah kansellatif, maka*$(x + e_1''x, e_2''x) \in \rho$, *untuk setiap* $x \in R$. *Sehingga*$e_1' = e_1'' = e$ *dan* $e_2' = e_2'' = f$. ■

Selanjutnyakongruensiregulerkiri (kanan) ρ pada semialjabar R atas S dikatakan kongruensi reguler maksimal kiri (kanan) jika ρ ≠ R × R dan ρ tidak termuat pada kongruensi reguler kiri (kanan) kecuali kongruensi universal.

Lemma 3.10 **[7]***Setiapkongruensiregulerkiri (kanan) padasemialjabarR atas S termuat dalam kongruensiregulermaksimalkiri (kanan).*

Bukti:*Diberikanρ kongruensi reguler kiri pada semialjabar R atas S, berarti terdapat* $e_1, e_2 \in R$ *sedemikian sehingga*$(x + e_1 x, e_2 x) \in \rho$ *untuk setiap* $x \in R$, *dan*$(ae_1 + e_2 a, e_1 a + ae_2) \in \rho$ *untuk setiap* $a \in S$.*Terdapatpenutuptransitifdariρ yaitu* $\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ *yang merupakan kongruensi maksimal. Karena* ρ^* *merupakan kongruensi maksimal yang dibangun oleh kongruensi reguler kiri ρ, maka*ρ^* *juga kongruensi reguler kiri yaitu terdapat* $e_1, e_2 \in R$ *sedemikian sehingga* $(x + e_1 x, e_2 x) \in \rho^*$ *untuk setiap* $x \in R$, *dan*$(ae_1 + e_2 a, e_1 a + ae_2) \in \rho^*$ *untuk setiap* $a \in S$.*Olehkarenaitu*$\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ *merupakan kongruensi reguler maksimal kiri.*
Selanjutnyaakandibuktikanbahwa$\rho \subset \rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$.
Diambil$n = 1$, *sehingga* $\rho^1 = \rho \subset \rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$.
Jadi, setiapkongruensiregulerkiritermuatdalamkongruensiregulermaksimalkiri. ■

Contoh :Diberikanhemiring$R = \mathbb{Z}_4$ yaitu hemiring bilangan bulat modulo 4, dan $S = \mathbb{Z}^+$hemiringbilanganbulattaknegatif. Diketahui$R$ semialjabar atas S. Relasi$\rho =$

$\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{3},\bar{3})\}$ padasemialjabar$R$ atas S merupakan kongruensi reguler maksimal.

Definisi 3.11 **[7]***Pasangan*$(e_1,e_2) \in R \times R$ *dengan* $(e_1,e_2) \neq (0,0)$ *dari hemiring R disebut pasangan identitas kiri jika* $x + e_1x = e_2x$, *untuk setiap* $x \in R$. *Sedangkanpasangan*$(e_1,e_2) \in R \times R$ *disebut pasangan identitas kanan jika* $x + xe_1 = xe_2$, *untuk setiap* $x \in R$.

Definisi 3.12 **[7]***Hemiringkansellatifterhadappenjumlahan*R *disebut hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas jika kongruensi universal dan kongruensi identitas merupakan kongruensi kansellatif pada* R.

Lemma 3.13 **[7]***Misalkan*R *hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas. Jika* (e_1,e_2) *adalah pasangan identitas kiri dari R, maka* (e_1,e_2) *juga pasangan identitas kanan.*

Bukti **:***Misalkan*(e_1,e_2)*adalahpasanganidentitas kiri. Maka*$r + e_1r = e_2r$ *untuk setiap* $r \in R$.
Pandang $\rho = \{(a + r + re_1, a + re_2) : a,r \in R\} \cup \{(a + re_2, a + r + re_1) : a,r \in R\} \cup \Delta_R$, *dimana*$\Delta_R = \{(r,r) : r \in R\}$.*Maka*$\rho$*bersifatrefleksifdansimetris.Misalkan*$(x,y) \in \rho$ *dan* $z \in R$. *Maka* (x,y) *adalah* $(a + r + re_1, a + re_2)$ *atau* $(a + re_2, a + r + re_1)$ *atau* (r,r)*untuk* $a,r \in R$. *Setidaknya* $(xz,yz) \in \Delta_R \subseteq \rho$ *dan* $(zx,zy) \in \rho$*serta* $(x+z,y+z) \in \rho$. *Maka penutup transitif dari* ρ *yaitu* $\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ *merupakan relasi kongruensi.Anggap* $\bar{\rho}^*$ *sebagai kongruensi kansellatif (sesuai lemma 3.7).Andaikan* $(e_1,e_2) \in \bar{\rho}^*$. *Terdapat* $z \in R$, *sedemikian sehingga* $(e_1 + z, e_2 + z) \in \rho^n$. *Maka* $(e_1 + z, e_2 + z) \in \rho^n$ *untuk bilangan bulat positif* n, *dengan kata lain terdapat* $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in R$ *sedemikian sehingga*$(e_1 + z, x_1), (x_1,x_2), \dots, (x_{n-1}, e_2 + z) \in \rho$. *Maka*$(e_1x + zx, x_1x), (x_1x, x_2x), \dots, (x_{n-1}x, e_2x + zx) \in \Delta_R \subseteq \rho$ *untuk setiap* $x \in R$. *Oleh karena itu* $e_1x + zx = x_1x = x_2x = \cdots = x_{n-1}x = e_2x + zx$ *untuk setiap* $x \in R$. *Sehingga* $e_1x + zx = e_2x + zx$ *untuk setiap* $x \in R$. *Maka* $e_1x = e_2x$. *Tetapi* $x + e_1x = e_2x$ *untuk setiap* $x \in R$. *Akibatnya* $x = 0$ *untuk setiap* $x \in R$, *yang berarti kontradiksi. Oleh karena itu* $(e_1,e_2) \notin \bar{\rho}^*$. *Karena R adalah hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas, diperoleh* $\bar{\rho}^* = \Delta_R$, *yang berarti bahwa* $a + r + re_1 = a + re_2$ *untuk setiap* $a,r \in R$. *Maka* $r + re_1 = re_2$ *untuk setiap* $r \in R$. *Oleh karena itu* (e_1,e_2) *adalah pasangan identitas kanan.* ■

Lemma 3.14 **[7]***Diberikan*ρ *kongruensi reguler maksimal kiri (kanan) pada semialjabar R*a*tas S. Maka* ρ *adalah reguler.*

Bukti **:***Misalkan*$(e_1,e_2) \in R \times R$ *seperti definisi 3.8. Karena* ρ*adalahkongruensiregulermaksimalkiripada*R, *himpunan kelas-kelas kongruensi* R/ρ *yang didefinisikan oleh* $R/\rho = \{x\rho | x \in R\}$ *adalah hemiring kansellatif penjumlahan, hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas.*
Di dalamR/ρ, $x\rho + e_1\rho x\rho = e_2\rho x\rho$ *untuk setiap* $x\rho \in R/\rho$. *Olehkarenaitudari lemma 3.13 diperoleh,*
$x\rho + x\rho e_1\rho = x\rho e_2\rho$*untuk setiap* $x\rho \in R/\rho$.
Dengan kata lain $(x + xe_1, xe_2) \in \rho$ *untuk setiap* $x \in R$.
Olehkarenaituρ*adalahregulerkanan.* ■

Teorema 3.15 **[7]***Diberikan*R *semialjabar atas S. Kongruensi* ρ *adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar R atas S jika hanya jika* ρ *adalah kongruensi reguler maksimal pada hemiring* R.

Bukti **:**$(\Leftarrow)$ *Diketahui* ρ *adalah kongruensi reguler maksimal pada*

hemiring R dan diberikan $(e_1, e_2) \in R \times R$ *seperti definisi 3.8.*
Maka $(x + e_1x, e_2x) \in \rho$ *dan* $(x + xe_1, xe_2) \in \rho$ *untuk setiap* $x \in R$.
Untuksetiap $a \in S$ *dan* $x \in R$, *diperoleh* $(ax + e_1(ax), e_2(ax)) \in \rho$ *dan* $(ax + (ax)e_1, (ax)e_2) \in \rho$.
Misalkan $(x, y) \in \rho$, *maka untuk setiap* $a \in S$, $((e_1a)x, (e_1a)y) \in \rho$ *dan* $((e_2a)x, (e_2a)y) \in \rho$ *yang berarti* $((e_1a)x + (e_2a)y, (e_1a)y + (e_2a)x) \in \rho$.
Dengan kata lain $(e_1(ax) + e_2(ay), e_1(ay) + e_2(ax)) \in \rho$ ……………………………………………….*(i)*
$(ax + e_1(ax) + e_2(ay), ay + e_1(ay) + e_2(ax)) \in \rho$ ………………………………*(ii)*
Dari (i) dan (ii) dengansifatkansellasidiperoleh $(ax, ay) \in \rho$.
Dengancara yang samayaituuntuksetiap $a \in S$, $(x(ae_1), y(ae_1)) \in \rho$ *dan* $(x(ae_2), y(ae_2)) \in \rho$ *yang berarti* $(x(ae_1) + y(ae_2), y(ae_1) + x(ae_2)) \in \rho$.
Dengan kata lain $((xa)e_1 + (ya)e_2, (ya)e_1 + (xa)e_2) \in \rho$ ……………………………………………..*(iii)*
$(xa + (xa)e_1 + (ya)e_2, ya + (ya)e_1 + (xa)e_2) \in \rho$ ……………………………..*(iv)*
Dari (iii) dan (iv) dengansifatkansellasidiperoleh $(xa, ya) \in \rho$.
Olehkarenaitu ρ *adalah kongruensi pada semialjabar Ratas S.*
Selanjutnyauntuksetiap $a \in S$, $(ae_1 + e_1(ae_1), e_2(ae_1)) \in \rho$ *dan* $((e_1a)e_2, e_1a + (e_1a)e_1) \in \rho$. *Olehkarenaitu* $(ae_1 + e_1(ae_1) + (e_1a)e_2, e_1a + (e_1a)e_1 + e_2(ae_1)) \in \rho$, *untuk setiap* $a \in S$. *Dengan kata lain* $(ae_1 + (e_1a)e_1 + (e_1a)e_2, e_1a + (e_1a)e_1 + e_2(ae_1)) \in \rho$, *untuk setiap* $a \in S$. *Dengan sifat kansellasi diperoleh* $(ae_1 + (e_1a)e_2, e_1a + e_2(ae_1)) \in \rho$ ………………………………………………*(v)*
Selanjutnyauntuksetiap $a \in S$, $(e_2a + (e_2a)e_1, (e_2a)e_2) \in \rho$ *dan* $(e_2(ae_2), ae_2 + e_1(ae_2)) \in \rho$. *Olehkarenaitu* $(e_2a + (e_2a)e_1 + e_2(ae_2), ae_2 + e_1(ae_2) + (e_2a)e_2) \in \rho$, *untuk setiap* $a \in S$. *Dengan kata lain* $(e_2a + (e_2a)e_1 + (e_2a)e_2, ae_2 + e_1(ae_2) + (e_2a)e_2) \in \rho$, *untuk setiap* $a \in S$. *Dengan sifat kansellasi diperoleh* $(e_2a + (e_2a)e_1, ae_2 + e_1(ae_2)) \in \rho$ …………………………………………………….*(vi)*
Dari (v) dan (vi) diperoleh $(ae_1 + (e_1a)e_2 + e_2a + (e_2a)e_1, e_1a + e_2(ae_1) + ae_2 + e_1(ae_2)) \in \rho$ *untuk setiap* $a \in S$.
Dengansifatkansellasidiperoleh $(ae_1 + e_2a, e_1a + ae_2) \in \rho$ *untuk setiap* $a \in S$.
Olehkarenaitu ρ *adalah kongruensi reguler pada semialjabar atas S.*
Andaikan ρ' *adalah kongruensi pada semialjabar atas S sedemikian sehingga* $\rho \subseteq \rho'$. *Maka* ρ' *merupakan kongruensi reguler pada hemiring R,* $\rho' = \rho$ *atau* $\rho' = R \times R$. *Oleh karena itu* ρ *adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar atas S.*
$(\Rightarrow)$ *Diketahui* ρ *adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar Ratas S. Maka* ρ *adalah kongruensi reguler pada hemiring R. Dengan lemma 3.10,* ρ *termuat di dalam kongruensi reguler maksimal* ρ' *pada hemiring R. Dari pembuktian pertama* ρ' *adalahkongruensiregulermaksimalpadasemialjabarRatas S, oleh karena itu* $\rho = \rho'$. ■

4. PENUTUP

Dari pembahasan yang telahdiuraikanpadababsebelumnya, dapatdisimpulkanbahwa$R$ semialjabar atas S merupakan struktur aljabar yang terbentuk dari dua hemiring R dan S dimana R bi-semimodul atas S sedemikian hingga $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

Kongruensiρ pada R semialjabar atas S merupakan kongruensi pada hemiring R yang bersifat *compatible*kanandan*compatible*kiriuntuksetiappergandaanolehelemen$S$. Jika kongruensi ρ pada R semialjabar atas S bersifat kansellatif maka disebut kongruensi kansellatif.Selanjutnya kongruensi kansellatif pada R semialjabar atas S disebut kongruensi reguler jika terdapat $e, f \in R$sedemikiansehinggakongruensitersebutbersifatregulerkiridanregulerkanan.Kongruensiregulerρ pada R semialjabar atas S disebut kongruensi reguler maksimal jika $\rho \neq R \times R$ dan tidak termuat pada kongruensi reguler lain. Kongruensiρ merupakan kongruensi reguler maksimal pada semialjabar R atas S jika hanya jika ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada hemiring R.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Acharyya, S. K, Chattopadhyay, K. C and Ray, G. G. 2002. *Hemiring-homomorphisms,Stone Chech Compactification and Hewitt Realcompactification.*Southeast Asian Bulletin of Mathematics, No. 26, hal: 363-373.

[2] Dudek, W. A., Shabir, M., and Anjum, R. 2010. *Characterizations ofHemirings by Their h-Ideals*.

[3] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. *Elements of Modern Algebra*. PWS-Kent Publishing Company. Boston.

[4] Herstein, I. N. 1976. *Topics in Algebra*.Jhon Willey and Sons. United States of America.

[5] Howie, J. M. 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*.Academic Press. London.

[6] Lipschutz, Seymour. 1985. *TeoriHimpunan*. Erlangga. Jakarta.

[7] Sen, M. K. and Bandyopadhyay, S. 1993. *Structure Space of ASemialgebra Over A Hemiring.*Kyungpook Mathematical Journal, Vol. 33, No. 1, hal: 25-36.

[8] Tim DosenPengampu Mata KuliahAljabar I. 2006. *BukuAjarAljabar I*. FMIPA Undip. Semarang.